

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений по математике 2008/2009 учебный год

1.2009 (10,11) ЛОГИКА, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

Функция двух переменных $f(x, y)$ положительна при всех (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq x^2 - 8x + 14, \\ y \geq x^2 + 2x - 3. \end{cases}$$

При всех остальных (x, y) функция $f(x, y)$ отрицательна. Верно ли, что при всех (x, y) , удовлетворяющих неравенству $y \leq x^2 - 4x + 7$, функция $f(x, y)$ отрицательна? Ответ обосновать.

ОТВЕТ Верно.

2.2009 (9,10) ЛОГИКА, КОМБИНАТОРИКА

Сколько различных по величине или по расположению прямоугольников, состоящих из целого числа клеток, можно начертить на шахматной доске 8 на 8. (Доску не крутить!)

ОТВЕТ: 1296.

3.2009 (11) (аналог 5.11.2011)

4.2009 (9?,10,11) МНОГОЧЛЕНЫ, ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

Найти ненулевой многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

ОТВЕТ: $x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$.

5.2009 (10,11) ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Найти все значения параметра a , при которых отрезок $[4a, 5a^2]$ содержит целое число.

ОТВЕТ: $(-\infty, 0] \cup [2/\sqrt{5}, +\infty)$.

6.2009 (11) ЛОГИКА, СТЕРЕОМЕТРИЯ

Все ребра тетраэдра равны 12 см. Можно ли его уместить в коробку, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами 13 см, 15 см, 9 см.

ОТВЕТ: можно

7.2009 (10,11) ЛОГИКА, НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

В каждой точке декартовой плоскости с целочисленными координатами, кроме начала координат $(0,0)$, построена окружность радиуса 10^{-6} с центром в этой точке. Доказать, что любая прямая, проходящая через начало координат, пересекается хотя бы с одной из этих окружностей.